

# Note sur la conjecture de Greenberg

Jean-François JAULENT

**Résumé.** Nous étudions la conjecture de Greenberg sur les  $\ell$ -invariants d'Iwasawa des corps totalement réels, en termes de classes logarithmiques. Nous faisons apparaître un critère suffisant de validité très simple dont nous montrons qu'il est également suffisant dans le contexte de la conjecture faible. Dans le cas semi-simple  $\ell$ -complètement décomposé, nous prouvons que la conjecture est vérifiée en  $\ell$  si et seulement si le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques du corps considéré capitule dans la  $\mathbb{Z}_\ell$ -tour cyclotomique.

**Abstract.** We use logarithmic  $\ell$ -class groups to take a new view on the Greenberg's conjecture about Iwasawa  $\ell$ -invariants of totally real number fields. By the way we recall and complete some classical results. We give a sufficient logarithmic criterium which is also necessary in the context of the so-called weak conjecture, when the prime  $\ell$  splits completely in  $F$ . In the semi-simple case, we unconditionally prove that the conjecture holds if and only if the logarithmic class group of  $F$  capitulates in the  $\mathbb{Z}_\ell$ -tower.

## Introduction

Le résultat emblématique de la Théorie d'Iwasawa affirme que les ordres respectifs  $\ell^{h_n}$  des  $\ell$ -sous-groupe de Sylow  $\mathcal{C}_{F_n}$  des groupes de classes d'idéaux attachés aux étages finis  $F_n$  d'une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension  $F_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  d'un corps de nombres  $F$  sont donnés asymptotiquement par une formule de la forme :

$$h_n = \mu_F \ell^n + \lambda_F n + \nu_F,$$

où  $\lambda_F$  et  $\mu_F$  sont des invariants structurels entiers attachés à la limite projective pour les morphismes normiques  $\mathcal{C}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}$  et  $\nu_F$  un entier relatif convenable.

Il est conjecturé, et cela a été démontré pour  $F$  abélien par Ferrero et Washington, que l'invariant  $\mu_F$  est toujours nul lorsque  $F_\infty$  est la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de  $F$ .

Lorsque, en outre, le corps de base  $F$  est totalement réel, la conjecture de Leopoldt (qui est vérifiée elle aussi pour  $F$  abélien en vertu du théorème d'indépendance de logarithmes de Baker-Brumer) affirme que  $F$  ne possède d'autre  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension que la cyclotomique, qui provient, par composition avec  $F$ , de l'unique pro- $\ell$ -extension abélienne réelle  $\mathbb{Q}_\infty$  de  $\mathbb{Q}$  qui est  $\ell$ -ramifiée (i.e. non ramifiée en dehors de  $\ell$ ).

Dans ce même cadre, i.e. pour  $F$  totalement réel, la conjecture de Greenberg postule que les invariants structurels  $\lambda_F$  et  $\mu_F$  sont tous deux nuls ; autrement dit que les  $\ell$ -groupes de classes  $\mathcal{C}_{F_n}$  sont stationnaires lorsqu'on monte la tour ; ce qui revient à affirmer que leur limite projective  $\mathcal{C}_F$  est un groupe fini.

Tester numériquement cette conjecture s'avère rapidement problématique, même pour un corps totalement réel de petit degré  $d$ , car elle est par essence de nature asymptotique, ce qui nécessite, en principe, d'effectuer des calculs dans des étages de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -tour de plus en plus élevés donc de degrés  $[F_n : \mathbb{Q}] = d\ell^n$  de plus en plus hauts. D'où l'importance d'obtenir des critères de validité susceptibles de se lire, sinon directement dans  $F$ , du moins à des étages assez bas de la tour. Il est naturel pour cela de distinguer suivant le comportement du premier  $\ell$  dans l'extension  $F/\mathbb{Q}$ .

L'objet de la présente note est précisément de produire de tels critères et plus spécialement dans le cas où la place  $\ell$  se décompose complètement dans  $F/\mathbb{Q}$  : un critère suffisant mais non

nécessaire, valable en toute généralité et qui se lit directement dans  $F$  (Th. 11), d'une part ; un critère nécessaire et suffisant, valable sous une hypothèse de semi-simplicité (Th. 15), d'autre part.

Nous nous appuyons pour cela sur la notion des classe logarithmique qui, de par sa définition même, se trouve particulièrement adaptée à l'étude des phénomènes cyclotomiques. Il n'entre naturellement pas dans le cadre de la présente note de faire une présentation complète de l'arithmétique des classes et unités logarithmiques : nous nous appuyons sur [19] pour leur définition ; sur [20] pour les éléments de la théorie  $\ell$ -adique du corps de classes qui sous-tendent leurs principales propriétés ; sur [1] et [2] enfin pour une description des algorithmes qui en permettent le calcul.

Disons simplement ici que ces groupes s'obtiennent naturellement en envoyant le  $\ell$ -adifié  $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$  du groupe multiplicatif du corps considéré dans la somme formelle  $\mathcal{D}\ell_F = \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}$  construite sur les places finies de  $F$  par une famille de valuations  $\widetilde{div} = (\widetilde{\nu}_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$  qui coïncident avec les valuations usuelles  $(\nu_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}}$  à l'exception des places au-dessus de  $\ell$  pour lesquelles leur définition fait intervenir le logarithme  $\ell$ -adique de la norme locale. Dans la suite exacte obtenue :

$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_F \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times \xrightarrow{\widetilde{div}} \widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{C}}_F \longrightarrow 1,$$

restreinte aux diviseurs de degré nul  $\widetilde{\mathcal{D}}_F = \widetilde{\bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathbb{Z}_\ell \mathfrak{p}} = \{\mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p} \mid \deg \mathfrak{a} = \sum_{\mathfrak{p}} \nu_{\mathfrak{p}} \deg \mathfrak{p} = 0\}$ , les groupes de classes  $\widetilde{\mathcal{C}}_F$  et d'unités logarithmiques  $\widetilde{\mathcal{E}}_F$  apparaissent respectivement comme noyau et conoyau du morphisme  $\widetilde{div}$  et donc comme analogues des  $\ell$ -adifiés des groupes de classes  $\mathcal{C}_F$  et d'unités  $\mathcal{E}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_F$  au sens ordinaire.

En dehors du cas abélien (où cela résulte encore du théorème d'indépendance de logarithmes de Baker-Brumer) et de quelques autres (cf. e.g. [21]), on ne sait pas si le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques est fini : de fait, comme expliqué dans [20, 22], la finitude de  $\widetilde{\mathcal{C}}_F$  est équivalente à la conjecture de Gross-Kuz'min pour le corps  $F$  et le premier  $\ell$ . Et, pour  $F$  totalement réel donné, on peut même espérer que  $\widetilde{\mathcal{C}}_F$  soit trivial pour presque tout  $\ell$ . Néanmoins cet obstacle théorique ne s'oppose pas au calcul : dès lors qu'on connaît le corps  $F$  numériquement en ce sens qu'on est capable de déterminer ses invariants arithmétiques, il est toujours possible de calculer le groupe des classes logarithmiques et d'en tester la finitude comme la trivialité.

Ce point précisé, les résultats théoriques fondamentaux de cette note sont les suivants :

– En premier lieu nous montrons que le critère de validité étudié par Gras dans [13] en liaison avec les heuristiques sur les régulateurs  $\ell$ -adiques s'interprète en termes de classes logarithmiques :

**Théorème A** (Théorème 11 & Scolie). *Si  $F$  est un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt pour un premier donné  $\ell$ , la conjecture de Greenberg est vérifiée en  $\ell$  dans  $F$  sous la condition suffisante que le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\widetilde{\mathcal{C}}_F$  soit trivial.*

– En second lieu, généralisant les travaux de Fukuda et Taya sur les corps quadratiques réels (cf. [4, 5, 6, 7, 8]), nous prouvons inconditionnellement dans le cas dit semi-simple que la conjecture de Greenberg se lit sur la capitulation des classes logarithmiques.

**Théorème B** (Théorème 15). *Si  $F$  est un corps de nombres abélien et  $\ell$  un nombre premier complètement décomposé dans  $F$  qui ne divise pas  $d = [F : \mathbb{Q}]$ , la conjecture de Greenberg est vérifiée en  $\ell$  dans  $F$  si et seulement si le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\widetilde{\mathcal{C}}_F$  capitule à un étage fini de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -tour cyclotomique  $F_\infty/F$ .*

– Enfin nous montrons, dans le contexte de ce qu'il est convenu d'appeler la *conjecture faible*, que le critère suffisant donné plus haut est également nécessaire :

**Théorème C** (Théorème 17 & Corollaire 18). *Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt en un premier  $\ell$  complètement décomposé. Lorsque les idéaux construits sur les places au-dessus de  $\ell$  aux divers étages  $F_n$  de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -tour cyclotomique  $F_\infty/F$  ont une image triviale dans le  $\ell$ -groupe des classes  $\mathcal{C}_{F_n}$ , le corps  $F$  satisfait la conjecture de Greenberg en  $\ell$  si et seulement si le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\widetilde{\mathcal{C}}_F$  est trivial.*

## Hypothèses et notations

Dans tout ce qui suit  $\ell$  est un nombre premier arbitraire et  $F$  un corps de nombres totalement réel de degré  $d$ .

Nous sommes plus particulièrement intéressés au cas où la place  $\ell$  se décompose complètement dans  $F$ . Néanmoins, certains résultats étant valables indépendamment de cette hypothèse, nous le précisons explicitement chaque fois qu'elle est utilisée.

- $F_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  désigne la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique de  $F$  (avec la convention  $[F_n : F] = \ell^n$ ); et  $\Gamma = \gamma^{\mathbb{Z}_\ell} = \text{Gal}(F_\infty/F)$  son groupe de Galois; puis  $\Lambda = \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$  l'algèbre d'Iwasawa associée.

- $F_n^{nr}$  désigne la  $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale de  $F_n$ . Il suit donc :  

$$\text{Gal}(F_n/F) \simeq \mathcal{C}_{F_n},$$

où  $\mathcal{C}_{F_n}$  est le  $\ell$ -sous-groupe de Sylow du groupe des classes d'idéaux (au sens ordinaire) de  $F_n$ .

- $F_n^{\ell d}$  désigne la  $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée  $\ell\infty$ -décomposée maximale de  $F_n$ . Il suit donc :  

$$\text{Gal}(F_n^{\ell d}/F_n) \simeq \mathcal{C}'_{F_n},$$

où  $\mathcal{C}'_{F_n} = \mathcal{C}_{F_n}/\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  est le  $\ell$ -groupe des  $\ell$ -classes d'idéaux de  $F_n$ , i.e. le quotient du  $\ell$ -groupe  $\mathcal{C}_{F_n}$  par le sous-groupe engendré par les classes des idéaux construits sur les premiers au-dessus de  $\ell$ .

- $F_n^{\ell c}$  désigne la pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale de  $F_n$ , i.e. la plus grande pro- $\ell$ -extension abélienne de  $F_n$  partout complètement décomposée sur  $F_\infty$ . Il suit donc :

$$\text{Gal}(F_n^{\ell c}/F_\infty) \simeq \tilde{\mathcal{C}}_{F_n},$$

où  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$  est le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques (de degré nul) du corps  $F_n$ . La conjecture de Gross-Kuz'min (pour  $F_n$  et  $\ell$ ) postule précisément que ce dernier groupe est fini.

- $F_n^{\ell r}$  désigne la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de  $F_n$  qui est  $\ell$ -ramifiée et  $\infty$ -décomposée, i.e. non-ramifiée en dehors des places au-dessus de  $\ell$  et complètement décomposée aux places à l'infini. Le corps  $F_n^{\ell r}$  contient naturellement la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty$  et la conjecture de Leopoldt postule précisément qu'il est de degré fini sur  $F_\infty$  puisque  $F_n$  est totalement réel. Dans ce cas, nous écrivons  $\mathcal{T}_{F_n} = \text{Gal}(F_n^{\ell r}/F_\infty)$  le sous-groupe de torsion de  $\text{Gal}(F_n^{\ell r}/F_n)$ . Il suit donc :  

$$\text{Gal}(F_n^{\ell r}/F_\infty) \simeq \mathcal{T}_{F_n}.$$

- $F_n^{bp}$  désigne l'extension de Bertrandias-Payan associée à  $F_n$ , i.e. le compositum des  $\ell$ -extensions cycliques de  $F_n$  qui sont *localement*  $\mathbb{Z}_\ell$ -plongeables sur  $F_n$ . Le corps  $F$  étant pris ici totalement réel, cette extension n'intervient dans la présente étude que pour  $\ell = 2$  :

- Pour  $\ell$  impair,  $F_n^{bp}$  coïncide, en effet, avec  $F_n^{\ell r}$  dès lors que les places  $\mathfrak{l}$  au-dessus de  $\ell$  sont complètement décomposées dans  $F$ , puisque les complétés  $F_{\mathfrak{l}}$  de  $F$  ne contiennent alors pas les racines  $\ell$ -ièmes de l'unité non plus que ceux  $F_{\mathfrak{l}_n}$  des  $F_n$  aux places  $\mathfrak{l}_n$  au-dessus de  $\ell$ .
- Pour  $\ell = 2$ , en revanche, supposé complètement décomposé dans  $F$ , la somme  $\mu_{F_\ell} = \bigoplus_{\mathfrak{l}|2} \mu_{F_{\mathfrak{l}}}$  est un  $\mathbb{F}_2$ -espace de dimension  $d$  et il en est de même au niveau  $F_n$ , de sorte qu'il vient :

$$\text{Gal}(F_n^{\ell r}/F_n^{bp}) \simeq \bigoplus_{\mathfrak{l}_n|2} \mu_{F_{\mathfrak{l}_n}}/\mu_{F_n} \simeq \{\pm 1\}^{d-1}.$$

- $F_\infty^{nr}$  désigne la pro- $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale de  $F_\infty$ . Il suit :  

$$F_\infty^{nr} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^{nr} \quad \text{et} \quad \text{Gal}(F_\infty^{nr}/F_\infty) = \mathcal{C}_F \simeq \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}.$$

Le groupe  $\mathcal{C}_F$  est canoniquement un  $\Lambda$ -module noethérien et de torsion. On note  $\lambda_F$  et  $\mu_F$  ses invariants d'Iwasawa, i.e. le degré et la  $\ell$ -valuation de son polynôme caractéristique  $\chi_{\mathcal{C}_F} \in \mathbb{Z}_\ell[[\gamma - 1]]$ .

- $F_\infty^{cd}$  dénote la pro- $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée et  $\ell\infty$ -décomposée maximale de  $F_\infty$ . Il suit :  

$$F_\infty^{cd} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^{\ell d} \quad \text{et} \quad \text{Gal}(F_\infty^{cd}/F_\infty) = \mathcal{C}'_F \simeq \varprojlim \mathcal{C}'_{F_n}.$$

Le groupe  $\mathcal{C}'_F$  est le quotient de  $\mathcal{C}_F$  par le sous-groupe  $\mathcal{C}_F^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  construit sur les classes des premiers au-dessus de  $\ell$ . Et, comme la montée dans la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty/F_n$  éteint toute possibilité d'inertie aux places étrangères à  $\ell$  dans une  $\ell$ -extension de  $F_\infty$ , le corps  $F_\infty^{cd}$  est aussi la plus grande pro- $\ell$ -extension abélienne de  $F_\infty$  qui est complètement décomposée partout.

Enfin, nous utilisons librement dans l'ensemble de la note les notations usuelles de la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes telle qu'exposée dans [19]. Elles sont introduite au fur et à mesure des besoins et récapitulées en appendice pour la commodité du lecteur.

## 1. Rappels sur le quotient de Herbrand

Si  $\mathcal{X}$  est un  $\Lambda$ -module noethérien et de torsion dont le polynôme caractéristique  $\chi \in \mathbb{Z}_\ell[\gamma - 1]$  n'est pas divisible par  $(\gamma - 1)$ , le noyau  $\mathcal{X}^\Gamma$  et le conoyau  ${}^\Gamma\mathcal{X}$  de la multiplication par  $\gamma - 1$  dans  $\mathcal{X}$  sont tous deux finis. On peut donc définir le quotient de Herbrand de  $\mathcal{X}$  par :

$$q(\mathcal{X}) = |\mathcal{X}^\Gamma|/|{}^\Gamma\mathcal{X}|$$

Étant donnée une suite exacte courte de tels modules  $1 \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow 1$ , la suite exacte du serpent associée à la multiplication par  $\gamma - 1$  donne la suite longue :

$$1 \rightarrow \mathcal{A}^\Gamma \rightarrow \mathcal{B}^\Gamma \rightarrow \mathcal{C}^\Gamma \rightarrow {}^\Gamma\mathcal{A} \rightarrow {}^\Gamma\mathcal{B} \rightarrow {}^\Gamma\mathcal{C} \rightarrow 1,$$

qui fournit l'identité :  $q(\mathcal{B}) = q(\mathcal{A})q(\mathcal{C})$ . Or, si  $\mathcal{F}$  est fini, la suite exacte canonique :

$$1 \longrightarrow \mathcal{F}^\Gamma \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{(\gamma-1)} \mathcal{F} \longrightarrow {}^\Gamma\mathcal{F} \longrightarrow 1,$$

donne immédiatement :  $|\mathcal{F}^\Gamma| = |{}^\Gamma\mathcal{F}|$ , i.e.  $q(\mathcal{F}) = 1$ . Il suit de là que le quotient de Herbrand est invariant par pseudo-isomorphisme. On peut donc le calculer en remplaçant  $\mathcal{X}$  par une somme directe de modules élémentaires  $\Lambda/P\Lambda$ . Or, pour un tel module, on a banalement :

$$\mathcal{X}^\Gamma = 1 \quad \text{et} \quad {}^\Gamma\mathcal{X} = \Lambda/(P\Lambda + (\gamma - 1)\Lambda) = \Lambda/(P(0)\Lambda + (\gamma - 1)\Lambda) = \mathbb{Z}_\ell/P(0)\mathbb{Z}_\ell.$$

De sorte que finalement il vient de façon générale :  $q(\mathcal{X}) = (\mathbb{Z}_\ell : \chi(0)\mathbb{Z}_\ell)$ . Et il suit :

$$\mathcal{X} \sim 0 \Leftrightarrow \chi \in \Lambda^\times \Leftrightarrow \chi(0) \in \mathbb{Z}_\ell^\times \Leftrightarrow q(\mathcal{X}) = 1$$

**Lemme 1.** *Un  $\Lambda$ -module noethérien et de torsion dont le polynôme caractéristique n'est pas divisible par  $\gamma - 1$  est pseudo nul si et seulement si son quotient de Herbrand vaut 1.*

Ce point acquis, intéressons-nous à la limite projective  $\mathcal{C}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}$  des  $\ell$ -groupes de classes. Lorsque le corps de base  $F$  est totalement réel, l'existence du quotient de Herbrand pour le groupe  $\mathcal{C}_F$  est liée naturellement aux conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuzmin :

**Théorème 2.** *Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel. Alors :*

- (i) *La conjecture de Leopoldt pour le corps  $F$  (et le premier  $\ell$ ) postule que la pro- $\ell$ -extension abélienne  $\ell$ -ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale  $F^{\ell r}$  de  $F$  est de degré fini sur  $F_\infty$ .*
- (ii) *Le polynôme caractéristique du  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}_K = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}$  est étranger à  $(\gamma - 1)$  si et seulement si la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale  $F^{ab} \cap F_\infty^{nr}$  de  $F$  qui est non-ramifiée et  $\infty$ -décomposée sur  $F_\infty$  est de degré fini sur  $F_\infty$ .*
- (iii) *La conjecture de Gross-Kuz'min postule pour le corps  $F$  (et le premier  $\ell$ ) postule que la pro- $\ell$  extension abélienne maximale  $F^{lc} = F^{ab} \cap F_\infty^{cd}$  de  $F$  qui est complètement décomposée partout sur  $F_\infty$  est de degré fini sur  $F_\infty$ .*

*Les inclusions immédiates  $F^{lc} \subset F^{ab} \cap F_\infty^{nr} \subset F^{\ell r}$  montrent que chacune des conditions précédentes implique celle qui suit.*

**Scolie 3.** *Lorsque les places au-dessus de  $\ell$  ne se décomposent pas dans la tour cyclotomique  $F_\infty/F$ , la condition (ii) – et donc la conjecture de Leopoldt pour  $F$  – impose au sous-groupe  $\mathcal{C}_F^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  construit sur les classes des premiers au-dessus de  $\ell$  d'être pseudo-nul. En d'autres termes les sous-groupes de classes  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  sont alors d'ordres bornés de sorte que l'on a :*

$$\mathcal{C}_{F_\infty}^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]} = 1.$$

*Preuve.* Le polynôme caractéristique  $\chi_F^{[\ell]}$  du module  $\mathcal{C}_F^{[\ell]}$  étant alors une puissance de  $(\gamma - 1)$ , la conjecture de Leopoldt impose  $\chi_F^{[\ell]} = 1$  ; et  $\mathcal{C}_F^{[\ell]}$  est donc pseudo-nul. Cela étant, comme la norme  $N_{m/n}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{C}_{F_m}^{[\ell]}$  sur  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  pour  $m \geq n \gg 0$ , l'identité  $N_{F_m/F_n} \circ j_{F_m/F_n}(\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}) = \mathcal{C}_{F_m}^{[\ell]} \ell^{m-n} = 1$  pour  $m \gg n$  montre que  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  capitule dans  $\mathcal{C}_{F_m}^{[\ell]}$  pour  $m \gg n$ .

## 2. Formulations équivalentes de la conjecture de Greenberg

La conjecture de Greenberg est souvent énoncée pour les corps de nombres totalement réels qui satisfont la conjecture de Leopoldt pour un premier donné  $\ell$ . En fait, comme discuté dans le Théorème 2, il est tout à fait possible d'en donner des formulations indépendantes de cette dernière conjecture. C'est d'ailleurs ainsi que procède Greenberg dans [15].

Rappelons que, pour chaque étage  $F_n$  de la tour cyclotomique  $F_\infty/F$ , nous avons désigné par  $\mathcal{C}'_{F_n}$  le  $\ell$ -groupe des  $\ell$ -classes d'idéaux de  $F_n$ , i.e. le quotient du  $\ell$ -groupe des classes  $\mathcal{C}l_{F_n}$  par le sous-groupe  $\mathcal{C}l_{F_n}^{[\ell]}$  engendré par les premiers au-dessus de  $\ell$ . Cela étant, nous avons :

**Théorème 4.** *Soient  $F$  un corps de nombres totalement réel et  $\mathcal{C}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}$  la limite projective (pour la norme) des  $\ell$ -groupes de classes d'idéaux attachés aux étages finis  $F_n$  de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty/F$ . Si le polynôme caractéristique du  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}_F$  n'est pas divisible par  $\gamma - 1$ , les assertions suivantes sont alors équivalentes et constituent la conjecture de Greenberg :*

- (i) *Le quotient de Herbrand de  $\mathcal{C}_F$  est trivial :  $q(\mathcal{C}_F) = 1$ .*
- (ii) *Le  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}_F$  est pseudo-nul :  $\mathcal{C}_F \sim 0$ .*
- (iii) *Les  $\ell$ -groupes de classes  $\mathcal{C}_{F_n}$  sont d'ordres bornés (et donc stationnaires).*
- (iv) *Le  $\ell$ -groupe de classes  $\mathcal{C}_{F_\infty} = \varinjlim \mathcal{C}_{F_n}$  est trivial :  $\mathcal{C}_{F_\infty} = 1$ .*
- (v) *Le sous-groupe ambige  $\mathcal{C}_{F_\infty}^\Gamma = \varinjlim \mathcal{C}_{F_n}^\Gamma$  est trivial :  $\mathcal{C}_{F_\infty}^\Gamma = 1$ .*

*Lorsque, de plus, les places au-dessus de  $\ell$  ne se décomposent pas dans  $F_\infty/F$ , ces mêmes conditions s'écrivent encore de façon équivalente :*

- (vi) *Le quotient de Herbrand de  $\mathcal{C}'_F$  est trivial :  $q(\mathcal{C}'_F) = 1$ .*
- (vii) *Le  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}'_F$  est pseudo-nul :  $\mathcal{C}'_F \sim 0$ .*
- (viii) *Les  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}'_{F_n}$  sont d'ordres bornés (et donc stationnaires).*
- (ix) *Le  $\ell$ -groupe des  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}'_{F_\infty} = \varinjlim \mathcal{C}'_{F_n}$  est trivial :  $\mathcal{C}'_{F_\infty} = 1$ .*
- (x) *Le sous-groupe ambige  $\mathcal{C}'_{F_\infty}^\Gamma = \varinjlim \mathcal{C}'_{F_n}^\Gamma$  est trivial :  $\mathcal{C}'_{F_\infty}^\Gamma = 1$ .*

*Preuve.* Examinons successivement les cinq premières équivalences :

- (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) En vertu du lemme précédent.
- (ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) Puisque la norme  $N_{F_m/F_n}$  est ultimement surjective de  $\mathcal{C}_{F_m}$  dans  $\mathcal{C}_{F_n}$ , dès que l'extension abélienne  $F_m/F_n$  est totalement ramifiée en au moins une place.
- (iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) Si les ordres  $|\mathcal{C}_{F_n}|$  sont bornés, les groupes de classes  $\mathcal{C}_{F_n}$  sont ultimement isomorphes par la norme donc capitulent dans la tour puisque la composée de l'extension  $j_{F_m/F_n}$  et de la norme  $N_{F_m/F_n}$  est l'exponentiation par le degré  $[F_m : F_n]$ . Et  $\mathcal{C}_{F_\infty}$  est trivial. Inversement, si  $\mathcal{C}_{F_\infty}$  est trivial, les groupes de classes capitulent dans la tour, donc sont d'ordre borné, puisque la capitulation est structurellement bornée d'après Iwasawa. Et  $\mathcal{C}_F$  est bien fini.
- (iv)  $\Leftrightarrow$  (v) Par action du pro- $\ell$ -groupe  $\Gamma$  sur la limite inductive de  $\ell$ -groupes  $\mathcal{C}_{F_\infty} = \varinjlim \mathcal{C}_{F_n}$ .

Ces équivalences acquises, la transposition aux groupes de  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}'_F$  ne pose aucune difficulté en vertu du Scolie 3, le sous-module  $\mathcal{C}_F^{[\ell]}$  étant pseudo-nul par hypothèse. On a ainsi : (i)  $\Leftrightarrow$  (vi) ; (ii)  $\Leftrightarrow$  (vii) ; (vii)  $\Leftrightarrow$  (viii) ; et, comme plus haut, (viii)  $\Leftrightarrow$  (ix), ainsi que (ix)  $\Leftrightarrow$  (x).

*Remarque.* De façon générale, le polynôme caractéristique du  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}$  est le produit  $\chi_F(\gamma - 1) = \chi_F^{[\ell]}(\gamma - 1)\chi'_F(\gamma - 1)$  de ceux du sous-groupe  $\mathcal{C}_F^{[\ell]}$  et du quotient  $\mathcal{C}'_F = \mathcal{C}_F/\mathcal{C}_F^{[\ell]}$ . Lorsque les places au-dessus de  $\ell$  ne se décomposent pas dans  $F_\infty/F$ , l'hypothèse  $(\gamma - 1) \nmid \chi_F(\gamma - 1)$  entraîne la trivialité du premier facteur, en vertu du Scolie 3 ; de sorte que l'on a :  $\chi_F = \chi'_F$ .

L'objet de la section qui suit est de préciser tout cela lorsque les places au-dessus de  $\ell$  sont complètement décomposées dans  $F/\mathbb{Q}$ , ce qui implique en particulier qu'elles sont totalement ramifiées dans la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty/F$ .

### 3. Compléments sur la Théorie $\ell$ -adique du corps de classes

Avant d'aller plus loin sur la question qui nous préoccupe, précisons quelques éléments de la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes lorsque les places sauvages se décomposent complètement.

Notons  $\mathcal{R}_{F_p} = \varprojlim F^\times / F^{\times \ell^n}$  le  $\ell$ -adifié du groupe multiplicatif du complété  $F_p$  de  $F$  en  $p$ ; désignons par  $\mathcal{U}_{F_p}$  le sous-groupe unité; et notons  $\mathcal{U}_{F_l}$  le groupe des unités logarithmiques, i.e. le sous-groupe de normes attaché à la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_p^c$  de  $F_p$  :

- Pour  $p$  *modérée*, i.e. pour  $p \nmid \ell\infty$ , le groupe  $\mathcal{R}_{F_p}$  est le produit direct  $\mathcal{R}_{F_p} = \mu_{F_p} \pi_p^{\mathbb{Z}_\ell}$  du  $\ell$ -groupe des racines de l'unité contenues dans  $F_p$  et du  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre construit sur l'image  $\pi_p$  d'une uniformisante arbitraire. Son sous-groupe unité est ainsi  $\mathcal{U}_{F_p} = \mu_{F_p}$ .
- Pour  $l$  *sauvage*, i.e. pour  $l \mid \ell$ , c'est le produit  $\mathcal{R}_{F_l} = \mathcal{U}_{F_l} \pi_l^{\mathbb{Z}_\ell}$  du groupe des unités principales du complété  $F_l$  et du  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre construit sur une uniformisante  $\pi_l$ . Si  $\ell$  se décompose complètement dans  $F$ , il est naturel de prendre pour  $\pi_l$  l'image de  $\ell$  dans  $F_l$ . De plus :
  - si  $\ell$  est impair, le groupe  $\mathcal{U}_{F_l}$  des unités principales est lui-même un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre : il est engendré par l'image  $\tilde{\pi}_l$  de  $1 + \ell$ ; et il vient ainsi :  $\mathcal{R}_{F_l} = \mathcal{U}_{F_l} \tilde{\mathcal{U}}_{F_l} = \tilde{\pi}_l^{\mathbb{Z}_\ell} \pi_l^{\mathbb{Z}_\ell}$ ;
  - si  $\ell$  vaut 2, il vient :  $\mathcal{R}_{F_l} = \{\pm 1\} \tilde{\pi}_l^{\mathbb{Z}_\ell} \pi_l^{\mathbb{Z}_\ell}$ ;  $\mathcal{U}_{F_l} = \{\pm 1\} \tilde{\pi}_l^{\mathbb{Z}_\ell}$ ; et  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_l} = \{\pm 1\} \pi_l^{\mathbb{Z}_\ell}$ .
- Pour  $p_\infty$  réelle, enfin, on a :  $\mathcal{R}_{F_{p_\infty}} = \mu_{F_{p_\infty}} = \{\pm 1\}$ , si  $\ell$  vaut 2; et  $\mathcal{R}_{F_{p_\infty}} = \mu_{F_{p_\infty}} = 1$ , sinon.

Le  $\ell$ -adifié du groupe des idéles du corps  $F$  est le produit restreint  $\mathcal{J}_F = \prod_p^{res} \mathcal{R}_{F_p}$  formé des familles  $(x_p)_p$  dont presque tous les éléments sont des unités. Son sous-groupe unité est le produit  $\mathcal{U}_F = \prod_p \mathcal{U}_{F_p}$ ; le sous-groupe des unités logarithmiques de  $\mathcal{J}_F$  est le produit  $\tilde{\mathcal{U}}_F = \prod_p \tilde{\mathcal{U}}_{F_p}$ .

Nous notons  $\mathcal{R}_{F_\ell} = \prod_{l \mid \ell} \mathcal{R}_{F_l}$  puis  $\mathcal{U}_{F_\ell} = \prod_{l \mid \ell} \mathcal{U}_{F_l}$  et  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} = \prod_{l \mid \ell} \tilde{\mathcal{U}}_{F_l}$  les groupes semi-locaux.

Le sous-groupe des idéles principaux est le tensorisé  $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} F^\times$  du groupe multiplicatif de  $F$ , qui se plonge canoniquement dans  $\mathcal{J}_F$  via le plongement diagonal de  $F$  dans le produit de ses complétés. Le quotient  $\mathcal{J}_F / \mathcal{R}_F$  est un groupe compact et la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes l'identifie au groupe de Galois  $\text{Gal}(F^{ab}/F)$  de la pro- $\ell$ -extension abélienne maximale de  $F$ . La Théorie de Galois établit alors une bijection entre les sous-extensions de  $F^{ab}/F$  et les sous-groupes fermés de  $\mathcal{J}_F$  qui contiennent  $\mathcal{R}_F$ . Le sous-groupe normique attaché à la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty$  de  $F$  est ainsi le noyau  $\tilde{\mathcal{J}}_F$  de la formule du produit pour les valeurs absolues.

Le sous-groupe unité  $\mathcal{E}_F = \mathcal{R}_F \cap \mathcal{U}_F$  de  $\mathcal{R}_F$  est le tensorisé  $\ell$ -adique  $\mathcal{E}_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E_F$  du groupe des unités de  $F$ . Le groupe des unités logarithmiques  $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \tilde{\mathcal{U}}_F$  est le sous-groupe des normes cyclotomiques dans  $\mathcal{R}_F$ ; contrairement à  $\mathcal{E}_F$ , ce n'est pas en général le  $\ell$ -adifié d'un sous-groupe de  $F^\times$ . Cependant  $\tilde{\mathcal{E}}_F$  comme  $\mathcal{E}_F$  sont des sous-groupes du  $\ell$ -adifié  $\mathcal{E}'_F = \mathbb{Z}_\ell \otimes_{\mathbb{Z}} E'_F$  du groupe  $E'_F$  des  $\ell$ -unités de  $F$ . Et la conjecture de Leopoldt (pour  $F$  et pour  $\ell$ ) affirme l'injectivité du morphisme de semi-localisation  $s_\ell$  de  $\mathcal{E}'_F$  dans  $\mathcal{R}_{F_\ell}$  induit par le plongement de  $F^\times$  dans  $F_\ell^\times = \prod_{l \mid \ell} F_l^\times$ .

Lorsque, en outre, les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement dans  $F/\mathbb{Q}$ , l'expression explicite des valeurs absolues montre que l'intersection de  $\tilde{\mathcal{J}}_F$  avec  $\mathcal{U}_{F_\ell} = \prod_{l \mid \ell} \mathcal{U}_{F_l}$  coïncide avec la pré-image  $\mathcal{U}_{F_\ell}^*$  dans  $\mathcal{U}_{F_\ell}$  du sous-groupe de torsion  $\mu_{\mathbb{Q}_\ell} \simeq \mathbb{Z}_\ell / 2\mathbb{Z}_\ell$  par la norme  $N_{F/\mathbb{Q}}$  :

$$\mathcal{U}_{F_\ell}^* = \{(x_l)_l \in \mathcal{U}_{F_\ell} \mid \prod_{l \mid \ell} x_l \in \mu_{\mathbb{Q}_\ell}\}.$$

Et la conjecture de Leopoldt affirme alors que l'image  $\mathcal{E}_{F_\ell=s_\ell}(\mathcal{E}_F)$  de  $\mathcal{E}_F$  dans  $\mathcal{U}_{F_\ell}$  est d'indice fini dans  $\mathcal{U}_{F_\ell}^*$  ou, de façon équivalente, que l'image  $\mathcal{E}'_{F_\ell=s_\ell}(\mathcal{E}'_F)$  de  $\mathcal{E}'_F$  dans  $\mathcal{R}_{F_\ell}$  est d'indice fini dans le produit  $\mathcal{R}_{F_\ell}^* = \mathcal{U}_{F_\ell}^* \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$ . Comme expliqué plus haut, elle entraîne dans ce cas la conjecture de Gross-Kuz'min, dont une formulation revient à postuler de même que que l'image  $\tilde{\mathcal{E}}_{F_\ell=s_\ell}(\tilde{\mathcal{E}}_F)$  de  $\tilde{\mathcal{E}}_F$  dans  $\mathcal{R}_{F_\ell}$  est d'indice fini dans  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$ .

Enfin, du fait que les places au-dessus de  $\ell$  sont totalement ramifiées dans  $F_\infty/F$ , chaque classe dans le  $\ell$ -groupe des classes d'idéaux au sens ordinaire peut être représentée par un idéal de degré nul (ou, si l'on préfère par un idéal de  $\tilde{\mathcal{J}}_F$ ) de sorte qu'on a :  $\mathcal{C}_F = \mathcal{J}_F / \mathcal{U}_F \mathcal{R}_F \simeq \tilde{\mathcal{J}}_F / \mathcal{U}_F^* \mathcal{R}_F$ , analoguement au  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques défini par l'identité :  $\tilde{\mathcal{C}}_F = \tilde{\mathcal{J}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$ . Tous deux admettent comme quotient le  $\ell$ -groupe des  $\ell$ -classes donné par :  $\mathcal{C}'_F = \tilde{\mathcal{J}}_F / \mathcal{R}_{F_\ell}^* \prod \mu_p \mathcal{R}_F$ .



#### 4. Calcul du quotient des genres dans le cas $\ell$ -décomposé

Supposons maintenant que les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement dans  $F$ .

Notons  $F^{bp}$  l'extension de Bertrandias-Payan du corps  $F$ , i.e. le compositum des  $\ell$ -extensions cycliques de  $F$  qui sont *localement* plongeables dans une  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension. Par la Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes, l'extension  $F^{bp}$  est associée au groupe de normes  $\prod_{\mathfrak{p}} \mu_{F_{\mathfrak{p}}} \mathcal{R}_F$  (cf. e.g. [20], Ex. 2.9). En particulier, elle est  $\ell$ -ramifiée (i.e. non-ramifiée en dehors de  $\ell$ ) et  $\infty$ -décomposée (i.e. totalement réelle), puisque fixée par  $\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}} = \mu_{F_{\mathfrak{p}}}$  pour  $\mathfrak{p}$  modérée et par  $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} = \mu_{F_{\mathfrak{p}}}$  pour  $\mathfrak{p}$  réelle.

De plus, pour chaque place  $\mathfrak{l}$  au-dessus de  $\ell$ , le sous-groupe d'inertie  $I_{\mathfrak{l}}(F^{bp}/F)$  s'identifie à l'image de  $\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{l}}}$  dans le quotient  $\mathcal{J}_F / \prod_{\mathfrak{p}} \mu_{F_{\mathfrak{p}}} \mathcal{R}_F$ . Or nous avons ici :  $\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{l}}} = \mu_{F_{\mathfrak{l}}} \tilde{\pi}_{\mathfrak{l}}^{\mathbb{Z}_\ell}$ , de sorte que  $I_{\mathfrak{l}}(F^{bp}/F)$  est engendré par l'image  $[\tilde{\pi}_{\mathfrak{l}}]$  de  $\tilde{\pi}_{\mathfrak{l}}$ , laquelle est d'ordre infini puisque la sous-extension cyclotomique  $F_\infty/F$  est infiniment ramifiée en  $\mathfrak{l}$  (et même totalement du fait de l'hypothèse de complète décomposition de  $\ell$  dans  $F/\mathbb{Q}$ ). Et  $F^{bp}/F_\infty$  est non-ramifiée aux places  $\mathfrak{l} \mid \ell$ . Ainsi :

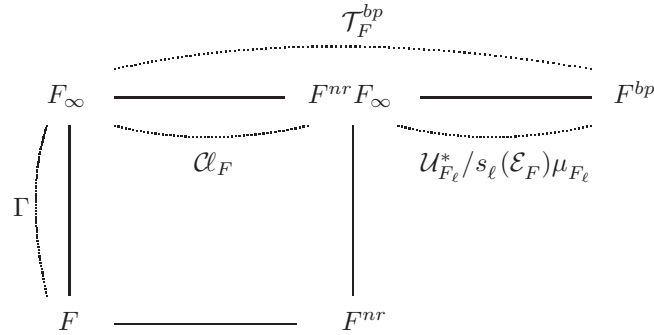
**Théorème 5.** *Soient  $F$  un corps de nombres totalement réel,  $\ell$  un nombre premier complètement décomposé dans  $F$ , et  $F^{bp}$  la pro- $\ell$ -extension de Bertrandias-Payan attachée à  $F$ . Alors :*

- Pour  $\ell \neq 2$ , la pro- $\ell$ -extension abélienne  $\ell$ -ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale  $F^{\ell r}$  coïncide avec  $F^{bp}$  et c'est la plus grande pro- $\ell$ -extension abélienne  $F$  qui est non-ramifiée sur  $F_\infty$ .
- Pour  $\ell = 2$  et sous la conjecture de Leopoldt, on a  $[F^{\ell r} : F^{bp}] = 2^{d-1}$  et la plus grande pro-2-extension abélienne totalement réelle de  $F$  non-ramifiée sur  $F_\infty$  est encore  $F^{bp}$ .

Dans les deux cas, le groupe  $\mathcal{T}_F^{bp} = \text{Gal}(F^{bp}/F_\infty)$  s'identifie au quotient des genres  ${}^\Gamma \mathcal{C}_F$  attaché à  $\mathcal{C}_F$  et la conjecture de Leopoldt (pour le corps  $F$  et le premier  $\ell$ ) postule donc précisément la finitude de  ${}^\Gamma \mathcal{C}_F$  : en particulier, les conditions (i) et (ii) du Théorème 2 sont alors équivalentes.

*Preuve.* Pour  $\ell = 2$ , on a, en effet :  $\text{Gal}(F^{\ell r}/F^{bp}) \simeq (\prod_{\ell \mid \ell} \mu_{F_{\mathfrak{l}}})/\mu_F$  (cf. [20], Ex. 2.9).

Considérons alors le schéma de corps :



La Théorie  $\ell$ -adique du corps de classes (cf. [20], §2) nous donne l'isomorphisme :

$$\text{Gal}(F^{bp}/F^{nr}) \simeq \mathcal{U}_{F_\ell}^*/s_\ell(\mathcal{E}_F)\mu_{F_\ell}; \quad \text{puis} \quad \mathcal{T}_F^{bp} \simeq \mathcal{U}_{F_\ell}^*/s_\ell(\mathcal{E}_F)\mu_{F_\ell}$$

où  $\mathcal{U}_{F_\ell}^* = \mathcal{U}_{F_\ell} \cap \tilde{\mathcal{J}}_F$  est défini dans la section précédente. Notant alors  $\ell^e$  l'exposant de  $\mathcal{T}_F^{bp}$ , nous obtenons, pour tout  $n \geq e$ , l'isomorphisme :

$$\mathcal{U}_{F_\ell}^*/s_\ell(\mathcal{E}_F)\mu_{F_\ell} \simeq (s_\ell(\mathcal{E}_F) \cap \mathcal{U}_{F_\ell}^{\ell^n})/s_\ell(\mathcal{E}_F^{\ell^n}).$$

Pour interpréter le numérateur, observons maintenant que  $\mathcal{U}_{F_\ell}^{\ell^n}$  est précisément le sous groupe normique de  $\mathcal{U}_{F_\ell}$  relatif à l'extension  $F_n/F$  ; de sorte que les éléments de l'intersection avec  $s_\ell(\mathcal{E}_F)$  sont exactement les images des unités de  $F$  qui sont normes (locales comme globales) dans l'extension cyclique  $F_n/F$ . Le morphisme  $s_\ell$  étant injectif sous la conjecture de Leopoldt, il suit :

**Corollaire 6.** *Lorsque les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement dans  $F$  et sous la conjecture de Leopoldt dans  $F$ , l'ordre du groupe de torsion  $\mathcal{T}_F$  est donné, pour tout  $n \geq e$ , par :*

$$|\mathcal{T}_F^{bp}| = |\mathcal{C}_F| \cdot |(\mathcal{E}_F \cap N_{F_n/F}(\mathcal{R}_{F_n}) : \mathcal{E}_F^{\ell^n})| = |\mathcal{C}_F| \cdot \frac{\ell^{n(d-1)}}{(\mathcal{E}_F : \mathcal{E}_F \cap N_{F_n/F}(\mathcal{R}_{F_n}))}$$

C'est la valeur du nombre de genres  $|{}^\Gamma \mathcal{C}_{F_n}|$  dans l'extension cyclique  $F_n/F$  ; de sorte que  $F^{\ell r}$  est encore la plus grande  $\ell$ -extension abélienne de  $F$  qui est non-ramifiée et  $\infty$ -décomposée sur  $F_n$ .

## 5. Critère de Greenberg dans le cas $\ell$ -décomposé

Revenant alors aux sous-groupes ambiges, nous obtenons immédiatement le résultat suivant :

**Lemme 7.** *Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt pour le premier  $\ell$  et où les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement. Alors  $F$  satisfait les conditions équivalentes de la conjecture de Greenberg listées plus haut si et seulement si la norme arithmétique  $N_{F_m/F_n} : \mathcal{C}_{F_m}^\Gamma \rightarrow \mathcal{C}_{F_n}^\Gamma$  réalise un isomorphisme pour tous  $m \geq n \gg 0$ .*

*Preuve.* D'après le Théorème 5 ci-dessus, les quotients des genres  ${}^\Gamma\mathcal{C}_{F_n}$  ont ultimement le même ordre  $|\mathcal{T}_F| = |{}^\Gamma\mathcal{C}_F|$  dans la tour  $F_\infty/F$ . Il en va donc de même des sous-groupes ambiges  $\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma$ , en vertu de l'égalité  $|\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma| = |{}^\Gamma\mathcal{C}_{F_n}|$ , dans l'extension cyclique  $F_n/F$ . L'égalité  $|{}^\Gamma\mathcal{C}_F| = |\mathcal{C}_F^\Gamma|$  a donc lieu si et seulement si les sous-groupes ambiges  $\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma$  s'identifient ultimement à leur limite projective, i.e. lorsqu'ils sont ultimement isomorphes par la norme.

Lorsque le corps totalement réel  $F$  vérifie la conjecture de Leopoldt (pour le premier  $\ell$ ), Greenberg a donné une formulation équivalente des diverses assertions du Théorème 4 :

**Théorème 8** (Critère de Greenberg). *Sous la conjecture de Leopoldt pour  $F$ , dès lors que les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement dans  $F/\mathbb{Q}$ , les dix conditions équivalentes du Théorème 4 sont réalisées si et seulement si les conditions équivalentes suivantes le sont également :*

- (xi) *Les sous-groupes ambiges  $\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma$  sont ultimement isomorphes :  $\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma = N_{F_m/F_n}(\mathcal{C}_{F_m}^\Gamma)$ .*
- (xii) *Pour tout  $n \gg 0$ , le sous-groupe ambige  $\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma$  de  $\mathcal{C}_{F_n}$  est engendré par les classes des premiers au-dessus de  $\ell$  :  $\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma = \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$ .*
- (xiii) *Pour tout  $n \gg 0$ , on a les deux conditions :*

$$\begin{cases} (xiii,a) & \mathcal{C}'_F \text{ capitule dans } \mathcal{C}'_{F_n}, \\ (xiii,b) & E_F \cap N_{F_n/F}(F_n^\times) = N_{F_n/F}(E_{F_n}), \end{cases}$$
*où  $E_F$  désigne le groupe des unités de  $F$ .*

*Preuve.* La condition (xii) constitue à proprement parler le critère donné par Greenberg.

L'équivalence avec (xiii) provient de l'isomorphisme de Chevalley comparant classes ambiges et classes d'idéaux ambiges (qui apparaît implicitement dans la preuve du Th. 2 de [30]) :

$$\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma / \mathcal{C}_{F_n}(Id_{F_n}^\Gamma) \simeq (E_F \cap N_{F_n/F}(F_n^\times)) / N_{F_n/F}(E_{F_n}),$$

la condition  $\mathcal{C}_{F_n}(Id_{F_n}^\Gamma) = \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  exprimant, elle, la capitulation de  $\mathcal{C}'_F$  dans  $\mathcal{C}'_{F_n}$ .

Compte tenu du Lemme, seule reste donc à vérifier l'équivalence avec la condition (xi). Or :

- d'un côté, l'égalité immédiate  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]} = N_{F_m/F_n}(\mathcal{C}_{F_m}^{[\ell]})$ , pour  $m \geq n$ , les places au-dessus de  $\ell$  étant totalement ramifiées dans  $F_\infty/F$ , nous donne l'implication : (xii)  $\Rightarrow$  (xi) ;
- d'un autre côté, sous la condition (xi), le groupe  $\mathcal{C}_{F_\infty}$  est trivial d'après le Lemme et les idéaux de  $F$  se principalisent dans  $F_n$  pour  $n \gg 0$ . Prenons aussi  $n$  assez grand pour avoir l'isomorphisme (xi) ; choisissons  $m = n + e$ , où  $e$  est l'indice défini dans la section précédente ; et partons d'un idéal  $\mathfrak{a}_n = N_{F_m/F_n}(\mathfrak{a}_m)$  représentant une classe de  $\mathcal{C}_{F_n}^\Gamma$  avec  $\mathfrak{a}_m$  appartenant à une classe ambige de  $F_m$ . Écrivons  $\mathfrak{a}_m^{\gamma-1} = (\alpha_m)$  pour un  $\alpha_m \in F_m$ , posons  $\alpha_n = N_{F_m/F_n}(\alpha_m)$  et considérons l'unité  $\varepsilon = N_{F_m/F}(\alpha_m) \in E_F \cap N_{F_m/F}(F_m^\times)$ . Par construction  $\varepsilon$  est une puissance  $\ell^m$ -ième locale aux places au-dessus de  $\ell$ , donc une puissance  $\ell^n$ -ième globale, disons  $\varepsilon = \eta^{\ell^n}$  pour un  $\eta \in E_F$ . Il suit :  $N_{F_n/F}(\alpha_n/\eta) = 1$ , donc  $\alpha_n = \eta\beta_n^{\gamma-1}$  pour un  $\beta_n \in F_n^\times$ . Et l'idéal  $\mathfrak{a}_n/\beta_n$  est un idéal ambige de  $F_n$ , produit comme tel d'un idéal construit sur les premiers au-dessus de  $\ell$  et d'un idéal étendu de  $F$  donc principal dans  $F_n$ . D'où (xii).

Le Théorème 4 fournit une condition nécessaire et suffisante de validité de la conjecture de Greenberg, qui reste malheureusement de nature asymptotique. L'objet des sections qui suivent est de lui substituer un critère un tout petit peu plus exigeant (et donc suffisant mais non nécessaire) mais qui se lit directement dans le corps étudié.



## 6. Schéma abélien des principales pro- $\ell$ -extensions $\ell$ -ramifiées

Supposons toujours  $\ell$  complètement décomposé. En vue de compléter le schéma galoisien donné dans la section 4, introduisons le compositum  $F_\infty F^{nr}$  de la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty$  et de la  $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée  $\infty$ -décomposée  $F^{nr}$  de  $F$ . Son groupe de normes est ainsi :

$$\tilde{\mathcal{J}}_F \cap \mathcal{U}_{F_\ell} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F = \mathcal{U}_{F_\ell}^* \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F.$$

Comparons  $F_\infty F^{nr}$  à la pro- $\ell$ -extension localement cyclotomique  $F^{lc}$  de groupe de normes :

$$\tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F = \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \prod_{\mathfrak{p} \nmid \ell} \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F.$$

De l'égalité :  $(\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F)(\mathcal{U}_{F_\ell}^*(\prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F)) = \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \mathcal{U}_{F_\ell}^* \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F = \mathcal{R}_{F_\ell}^* \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F$ ,

nous concluons que l'intersection  $F^{lc} \cap F_\infty F^{nr}$  est précisément le compositum  $F_\infty F^{\ell d}$ , où  $F^{\ell d}$  est la  $\ell$ -extension abélienne non-tamifiée  $\ell\infty$ -décomposée maximale de  $F$ .

Pour déterminer le compositum  $F^{lc} F_\infty^{nr}$ , formons l'intersection  $(\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F) \cap (\mathcal{U}_{F_\ell}^*(\prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F))$ .

**Lemme 9.** Notons  $\tilde{\mathcal{E}}'_{F_\ell}$  l'image canonique du groupe des  $\ell$ -unités  $\mathcal{E}'_F$  dans le groupe des unités logarithmiques semi-locales  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$ , c'est-à-dire la pré-image dans  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$  du sous-groupe  $s_\ell(\mathcal{E}'_F) \mathcal{U}_{F_\ell}^* / \mathcal{U}_{F_\ell}^*$  de  $\mathcal{R}_{F_\ell}^* / \mathcal{U}_{F_\ell}^* \simeq \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} / \mu_{F_\ell}$ . Écrivons de même  $\mathcal{E}'_{F_\ell}$  l'image de  $\mathcal{E}'_F$  dans  $\mathcal{U}_{F_\ell}^*$ , c'est-à-dire la pré-image dans  $\mathcal{U}_{F_\ell}^*$  du sous-groupe  $s_\ell(\mathcal{E}'_F) \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} / \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$  de  $\mathcal{R}_{F_\ell}^* / \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \simeq \mathcal{U}_{F_\ell}^* / \mu_{F_\ell}$ . Il vient alors :

$$(\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F) \cap (\mathcal{U}_{F_\ell}^*(\prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F)) = \tilde{\mathcal{E}}'_{F_\ell} \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F = \mathcal{E}'_{F_\ell}^* \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F.$$

Et le groupe de Galois  $\text{Gal}(F^{bp} / F^{lc} F^{nr})$  s'identifie au quotient  $\mathcal{V}_F \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E}'_F / \tilde{\mathcal{E}}_F \mathcal{E}_F$ .

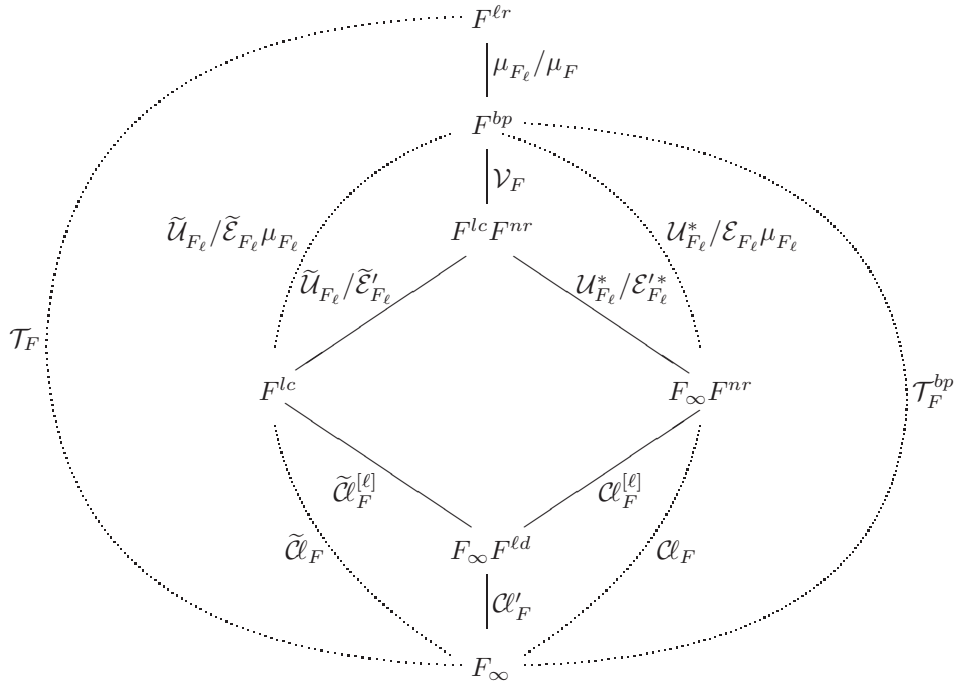
*Preuve.* Le calcul de l'intersection est immédiat. Il vient, par exemple :

$$(\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F) \cap (\mathcal{U}_{F_\ell}^*(\prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F)) = (\tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell} \cap \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{E}'_F) \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F.$$

Intéressons-nous donc au groupe  $G = \text{Gal}(F^{bp} / F^{lc} F^{nr}) \simeq \tilde{\mathcal{E}}'_{F_\ell} \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F / \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F$ , quotient des groupes de normes respectivement attachés à  $F^{lc} F^{nr}$  et à  $F^{bp}$ . Il vient, comme annoncé :

$$G \simeq \tilde{\mathcal{E}}'_{F_\ell} / (\tilde{\mathcal{E}}'_{F_\ell} \cap \prod \mu_{\mathfrak{p}} \mathcal{R}_F) \simeq \tilde{\mathcal{E}}'_{F_\ell} / \tilde{\mathcal{E}}_{F_\ell} \simeq \mathcal{E}'_{F_\ell} \mathcal{U}_{F_\ell}^* / \tilde{\mathcal{E}}_{F_\ell} \mathcal{U}_{F_\ell}^* \simeq \mathcal{E}'_{F_\ell} / \tilde{\mathcal{E}}_{F_\ell} \mathcal{E}_{F_\ell} \simeq \mathcal{E}'_F / \tilde{\mathcal{E}}_F \mathcal{E}_F = \mathcal{V}_F.$$

En résumé, les extensions considérées prennent ainsi place dans le diagramme suivant où sont figurés les corps et les groupes de Galois :



## 7. Critère de Gras dans le cas $\ell$ -décomposé

Le critère de Gras consiste à remplacer la condition (x), qui exprime la trivialité de la limite inductive des  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes ambiges  $\mathcal{C}'_{F_\infty} = 1$  par la condition asymptotique *a priori* plus exigeante :  $\mathcal{C}'_{F_n} = 1$  pour  $n \gg 0$  (cf. [13], Th. 2.4) :

**Proposition 10** (Critère suffisant de Gras). *Sous la conjecture de Leopoldt pour  $F$  et si les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement dans  $F/\mathbb{Q}$ , la condition  $\mathcal{C}'_{F_\infty} = 1$  a lieu dès que sont vérifiées les conditions asymptotiques équivalentes suivantes :*

(xi') Pour tout  $n \gg 0$ , on a :  $\mathcal{C}'_{F_n} = 1$ .

(xii') Pour tout  $n \gg 0$ , on a les deux conditions :  $\begin{cases} (xii', a) & \mathcal{C}'_F = 1, \\ (xii', b) & (E'_F : E'_F \cap N_{F_n/F}(F_n^\times)) = \ell^{n(d-1)}. \end{cases}$

où  $E'_F$  est le groupe des  $\ell$ -unités de  $F$ .

*Preuve.* L'équivalence des deux conditions résulte de la formule des classes ambiges qui s'écrit ici, pour les  $\ell$ -classes :

$$|\mathcal{C}'_{F_n}| = |\mathcal{C}'_F| \frac{\prod_{|\ell| \in e_l(F_n/F)} \ell^{n(d-1)}}{[F_n:F] (E'_F : E'_F \cap N_{F_n/F}(F_n^\times))} = |\mathcal{C}'_F| \frac{\ell^{n(d-1)}}{(E'_F : E'_F \cap N_{F_n/F}(F_n^\times))}.$$

Comme observé par Gras (cf. [13], Prop. 4.5), le critère asymptotique introduit peut se lire à n'importe quel étage de la tour  $F_\infty/F$ . En fait, il se lit directement dans  $F$  :

**Théorème 11.** *Soit  $F$  totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt et où les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement. Les quatre conditions suivantes sont alors équivalentes :*

(a) Le critère asymptotique de Gras est satisfait :  $\mathcal{C}'_{F_n} = 1$ , pour tout  $n \gg 0$ .

(b) On a simultanément les identités :  $\mathcal{C}'_F = 1$  et  $\mathcal{U}_{F_\ell}^* / \mathcal{E}_{F_\ell}' = 1$ .

(c) Le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques de  $F$  est trivial :  $\tilde{\mathcal{C}}_F = 1$ .

*Preuve.* D'après la Proposition 10, nous pouvons remplacer la condition (a) par les deux conditions  $\mathcal{C}'_F = 1$  et  $(E'_F : E'_F \cap N_{F_n/F}(F_n^\times)) = \ell^{n(d-1)}$  pour  $n \gg 0$ . Intéressons-nous plus particulièrement à la seconde, que nous pouvons réécrire, après  $\ell$ -adification et pour un  $n > 0$  fixé, sous la forme :

$$(\mathcal{E}'_F : \mathcal{E}'_F \cap N_{F_n/F}(\mathcal{R}_{F_n})) = \ell^{n(d-1)}.$$

Observons d'abord que l'intersection  $\mathcal{E}'_F \cap N_{F_n/F}(\mathcal{R}_{F_n})$  contient évidemment le sous-groupe  $\tilde{\mathcal{E}}_F$  des normes cyclotomiques ainsi que le sous-groupe des puissances  $\ell^n$ -ièmes dans  $\mathcal{E}'_F$ . Par suite, puisque le quotient  $\mathcal{E}'_F / \tilde{\mathcal{E}}_F$  est un  $\mathbb{Z}_\ell$ -module libre de dimension  $d-1$  (le corps  $F$  vérifiant la conjecture de Gross-Kuz'min en vertu du Théorème 2), l'égalité précédente affirme tout simplement que l'on a :

$$\mathcal{E}'_F \cap N_{F_n/F}(\mathcal{R}_{F_n}) = \tilde{\mathcal{E}}_F \mathcal{E}'_F{}^{\ell^n}.$$

Or, d'après le principe de Hasse, le groupe de gauche n'est autre que la préimage dans  $\mathcal{E}'_F$  (par l'application de semi-localisation  $s_\ell$ ) du sous-groupe normique  $\mathcal{U}_{F_\ell}^{*\ell^n} \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$  de  $\mathcal{R}_{F_\ell}^*$  associé à  $F_n$ .

Ainsi, dans le plongement canonique de  $\mathcal{E}'_F / \tilde{\mathcal{E}}_F$  dans  $\mathcal{U}_{F_\ell}^* \simeq \mathcal{R}_{F_\ell}^* / \tilde{\mathcal{U}}_{F_\ell}$ , les éléments de l'image  $\mathcal{E}'_{F_\ell}^*$  qui sont des puissances  $\ell^n$ -ièmes dans  $\mathcal{U}_{F_\ell}^*$  sont les puissances  $\ell^n$ -ièmes des éléments de  $\mathcal{E}'_{F_\ell}^*$ .

Il vient donc :  $\mathcal{E}'_{F_\ell}^* = \mathcal{U}_{F_\ell}^*$  ; i.e. comme annoncé :  $\mathcal{U}_{F_\ell}^* / \mathcal{E}'_{F_\ell}^* = 1$ . Et la réciproque est immédiate.

Enfin, conformément au diagramme des extensions dressé dans la section précédente, la conjonction des deux égalités  $\mathcal{C}'_F = 1$  et  $\mathcal{U}_{F_\ell}^* / \mathcal{E}'_{F_\ell}^* = 1$  traduit simplement la trivialité du groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_F$ .

*Remarque.* Il est conjecturé que le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques d'un corps de nombres totalement réel donné est trivial pour presque tout  $\ell$ . Il résulterait dans ce cas du Théorème 11 que les corps totalement réels  $F$  qui vérifient la conjecture de Leopoldt vérifient également la conjecture de Greenberg pour presque tous les premiers  $\ell$  complètement décomposés dans  $F/\mathbb{Q}$ .

**Scolie 12.** *L'équivalence  $\mathcal{C}'_F = 1 \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{C}}_F = 1$  vaut indépendamment de toute hypothèse sur le corps  $F$ , puisque  $\tilde{\mathcal{C}}_F$  est le quotient des genres  ${}^\Gamma \mathcal{C}'_F = \mathcal{C}'_F / \mathcal{C}'_F{}^{(\gamma^{-1})}$  associé au  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}'_F$ .*

## 8. Critère logarithmique dans le cas abélien semi simple $\ell$ -décomposé

Revenons un instant sur le cas général étudié dans les premières sections : si  $F$  totalement réel satisfait la conjecture de Greenberg, le  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}'_F = \varprojlim \mathcal{C}'_{F_n}$  est fini et l'on a donc :

$$\mathcal{C}'_{F_n} \simeq \mathcal{C}'_F \text{ pour } n \gg 0.$$

De façon semblable, l'identité  $\mathcal{C}'_F = \varprojlim \tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$  nous donne :  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n} \simeq \mathcal{C}'_F \simeq \mathcal{C}'_{F_n}$  pour  $n \gg 0$ . Ainsi les  $\ell$ -groupes de classes logarithmiques sont stationnaires (pour la norme), donc, par un argument classique déjà utilisé lors de la démonstration du Théorème 4, capitulent dans  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty}$  :

**Proposition 13.** *Si  $F$  est un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Greenberg, le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques de  $F_\infty$  est trivial :  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_\infty} = \varinjlim \tilde{\mathcal{C}}_{F_n} = 1$ .*

*Il en résulte que le sous-groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}^{[\ell]}$  de  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$  formé des classes logarithmiques des diviseurs construits sur les places au-dessus de  $\ell$  est lui-même trivial pour tout  $n$  assez grand :  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}^{[\ell]} = 1$ .*

**Corollaire 14.** *Si, en outre, les places au-dessus de  $\ell$  se décomposent complètement dans  $F/\mathbb{Q}$ , le  $\ell$ -groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_F$  des classes logarithmiques de  $F$  capitule dans  $F_n$  pour tout  $n$  assez grand.*

*Preuve.* D'après le critère de Greenberg (cf. Th. 8, (xiii, a)), en effet, le  $\ell$ -groupe des  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}'_F$  capitule dans  $F_n$  pour  $n \gg 0$ . Or, sous la conclusion de la Proposition,  $\mathcal{C}'_{F_n}$  coïncide avec  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$ , puisque les diviseurs logarithmiques (de degré nul) construits sur les places de  $F_n$  au-dessus de  $\ell$  sont alors principaux.

*Nota.* La condition obtenue n'exige pas la trivialité de  $\tilde{\mathcal{C}}_F$ , qui entraîne, elle,  $\mathcal{C}'_F = 1$ .

Le Corollaire ci-dessus fournit ainsi un critère algorithmiquement effectif pour tester la conjecture de Greenberg : dès lors qu'on sait calculer dans le corps  $F$ , on dispose d'un système de générateurs du  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques  $\tilde{\mathcal{C}}_F$  et il s'agit de s'assurer que ceux-ci deviennent principaux lorsqu'on les étend dans la tour cyclotomique, le calcul s'arrêtant dès qu'on a obtenu un corps  $F_n$  où cela se produit.

En fait, ce critère nécessaire est également suffisant dans le cas semi-simple :

**Théorème 15** (Critère logarithmique). *Soient  $F$  un corps abélien de degré  $d$  et  $\ell \nmid d$  un nombre premier complètement décomposé dans  $F$ . Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

- (i)  *$F$  vérifie la conjecture de Greenberg (pour le premier  $\ell$ ).*
- (ii) *Il existe un  $r \in \mathbb{N}$  tel qu'on ait les deux conditions :*

$$\begin{cases} (ii, a) & \mathcal{C}'_F \text{ capitule dans } F_r, \\ (ii, b) & \tilde{\mathcal{C}}_{F_r}^{[\ell]} = 1. \end{cases}$$
- (iii) *Le groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_F$  des classes logarithmiques de  $F$  capitule dans  $F_n$  pour tout  $n$  assez grand.*

Avant d'établir ce résultat, donnons quelques exemples :

- Si  $F$  est un corps multiquadratique totalement réel et  $\ell$  un premier impair qui se décompose complètement dans  $F/\mathbb{Q}$ , les  $\ell$ -groupes de classes attachés à  $F$  s'écrivent comme produits directs des  $\ell$ -groupes homologues respectivement attachés aux sous-corps quadratiques  $k$  de  $F$ . La condition (iii) du Théorème est donc remplie si et seulement si elle l'est pour chacun de ces sous-corps  $k$ .
- Pour  $k = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$  quadratique réel et  $d \equiv 1 \pmod{\ell}$ , la condition  $\tilde{\mathcal{C}}_{k_n}^{[\ell]} = 1$  requise par l'assertion (ii, a) correspond exactement à la condition (i) du Théorème 2 de [7]. Le Théorème 15 peut ainsi être regardé comme une double généralisation, conceptuelle et technique, du résultat principal de Fukuda et Taya sur les corps quadratiques réels.
- Ainsi, pour  $\ell = 3$  et  $m \equiv 1 \pmod{3}$  sur les quelque 2256 corps quadratiques réels obtenus pour  $m < 10.000$ , seuls 237 (soit environ 10%) ont un 3-groupe des classes logarithmiques non trivial, donc ne satisfont pas le critère (ii) pour  $r = 0$ . Cette proportion est de 2.801/22.793 (soit environ 12 %) pour  $m < 100.000$ . Elle est de 30.747/227.953 (soit environ 13,5 %) pour  $m < 1.000.000$ .

## 9. Preuve du critère logarithmique

Soient donc  $F$  un corps abélien de degré  $d$  et  $\ell \nmid d$  un nombre premier impair complètement décomposé dans  $F$ . Notons  $\Delta = \text{Gal}(F/\mathbb{Q})$  le groupe de Galois de  $F$ .

Nous allons montrer que sous la condition (ii) du Théorème 15, le corps  $F$  satisfait la condition (xiii) du Théorème 8, ce qui achèvera la démonstration du critère logarithmique annoncé.

Par hypothèse, l'algèbre  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$  est une algèbre semi-locale qui s'écrit comme produit direct

$$\mathbb{Z}_\ell[\Delta] = \bigoplus_\varphi \mathbb{Z}_\ell[\Delta]e_\varphi = \bigoplus_\varphi Z_\varphi$$

d'extension non-ramifiées  $Z_\varphi$  de  $\mathbb{Z}_\ell$  indexées par les caractères  $\ell$ -adiques irréductibles de  $\Delta$ . Et les idempotents primitifs associés  $e_\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\sigma \in \Delta} \varphi(\sigma) \sigma^{-1}$  permettent de décomposer chaque  $\mathbb{Z}_\ell[\Delta]$ -module comme somme directe de ses  $\varphi$ -composantes, lesquelles sont des  $Z_\varphi$ -modules.

En particulier, les  $\ell$ -groupes  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  s'écrivent comme sommes directes de leurs  $\varphi$ -composantes respectivement engendrées par les classes  $[\mathfrak{a}_n^\varphi]$  des idéaux  $\mathfrak{a}_n^\varphi = \mathfrak{l}_n^{e_\varphi}$  obtenus par action de l'idempotent  $e_\varphi$  sur l'unique idéal premier  $\mathfrak{l}_n = \mathfrak{l}^{1/\ell^n}$  au-dessus de l'un des idéaux  $\mathfrak{l}$  de  $F$  divisant  $\ell$  choisi arbitrairement. Or, ces groupes sont ultimement constants, comme expliqué dans la section 1, puisque le corps  $F$ , supposé abélien, vérifie la conjecture de Leopoldt. Notons donc  $\ell^{h_\varphi}$  l'ordre de la  $\varphi$ -composante de  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  et écrivons (pour  $n \geq r$  assez grand) :

$$\mathfrak{a}_n^{\varphi \ell^{h_\varphi}} = (\alpha_n^\varphi), \text{ pour une } \ell\text{-unité } \alpha_n^\varphi \in \mathcal{E}_{F_n}^{e_\varphi}.$$

Observons que  $\mathcal{E}_{F_n}^{e_\varphi}$  est  $Z_\varphi$ -engendré par l'élément  $\alpha_n^\varphi$  et le sous-module  $\mathcal{E}_{F_n}^{e_\varphi}$ ; que  $\alpha_n^\varphi$  est défini modulo une unité. Choisissons donc  $\alpha_n^\varphi$  de telle sorte que la  $\ell$ -valuation  $\nu_n^\varphi = v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_n}(\alpha_n^\varphi))$  de sa valuation logarithmique  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_n}(\alpha_n^\varphi) = \text{Log}_\ell(N_{F_n/\mathbb{Q}_\ell}(\alpha_n^\varphi)/\ell^r \text{Log}_\ell(1+\ell))$  soit minimale dans  $\mathcal{E}_{F_n}^{e_\varphi}$ .

Notons que ce choix implique  $\nu_n^\varphi = 0$  : en effet, comme le diviseur logarithmique (de degré nul pour  $\varphi \neq 1$ ) défini par  $\tilde{\mathfrak{a}}_n^\varphi = \frac{1}{d} \sum_{\tau \in \Delta} \varphi(\tau^{-1}) \mathfrak{l}_n^\tau$  est principal en vertu de la condition (ii, b), il s'écrit  $\widetilde{\text{div}}(\beta_n^\varphi)$  pour une  $\ell$ -unité  $\beta_n^\varphi \in \mathcal{E}_{F_n}^{e_\varphi}$  qui vérifie par définition  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_n^\tau}(\beta_n^\varphi) = \frac{1}{d} \varphi(\tau^{-1})$  pour tout  $\tau \in \Delta$ . L'un au moins de ces coefficients, disons  $\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_n^\tau}(\beta_n^\varphi)$ , n'est pas divisible par  $\ell$ ; et il vient donc, par minimalité :  $\nu_n^\varphi \leq v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_n}(\beta_n^{\varphi \tau^{-1}})) = 0$ ; i.e.  $\nu_n^\varphi = 0$ .

Cela étant, écrivons  $\mathfrak{a}_{r+1}^{\varphi \ell^{h_\varphi}} = (\alpha_{r+1}^\varphi)$ ; puis prenons la norme  $N = N_{F_{r+1}/F_r}$ . Nous obtenons :

$$\alpha_r^\varphi = N(\alpha_{r+1}^\varphi) \varepsilon_r^\varphi, \text{ pour une unité } \varepsilon_r^\varphi \in \mathcal{E}_{F_r}^{e_\varphi}.$$

Et de  $v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_r}(N\alpha_{r+1}^\varphi)) = 1 + v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_{r+1}}(\alpha_{r+1}^\varphi)) = 1 + \nu_{r+1}^\varphi = 1 > 0 = \nu_r^\varphi = v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_r}(\alpha_r^\varphi))$ , nous concluons :  $v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_r}(\varepsilon_r^\varphi)) = 0$ . Ainsi :

**Lemme 16.** *Sous la condition  $\tilde{\mathcal{C}}_{F_r}^{[\ell]} = 1$ , pour chaque caractère  $\ell$ -adique irréductible  $\varphi \neq 1$ , la  $\varphi$ -composante du  $\ell$ -adifié  $\mathcal{E}_{F_r}$  du groupe  $E_{F_r}$  des unités de  $F_r$  contient une unité  $\varepsilon_n^\varphi$  qui est une uniformisante logarithmique en la place  $\mathfrak{l}_n$ , i.e. qui vérifie :  $v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_r}(\varepsilon_r^\varphi)) = 0$ .*

Posons alors :  $\varepsilon_\varphi = N_{F_r/F}(\varepsilon_r^\varphi)$ . Nous avons par construction :  $v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon_\varphi)) = r + v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}_r}(\varepsilon_r^\varphi)) = r$ .

D'un autre côté, nous avons directement :

$$(\mathcal{E}_F \cap N_{F_r/F}(\mathcal{R}_{F_r}))^{e_\varphi} = \{\eta_\varphi \in \mathcal{E}_F^{e_\varphi} \mid v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}}(\eta_\varphi)) \geq r \quad \forall \mathfrak{l} \mid \ell\}.$$

Observons que  $(\mathcal{E}_F \cap N_{F_r/F}(\mathcal{R}_{F_r}))^{e_\varphi}$  est monogène comme  $Z_\varphi$ -module, en tant que sous-module de  $\mathcal{E}_F^{e_\varphi}$ ; et faisons choix d'un générateur  $\eta_\varphi$ . Cela étant, écrivons :

$$\varepsilon_\varphi = \eta_\varphi^{\lambda_\varphi} \text{ pour un } \lambda_\varphi \in Z_\varphi \text{ de la forme } \ell^{n_\varphi} u_\varphi \text{ avec } n_\varphi \in \mathbb{N} \text{ et } u_\varphi \in Z_\varphi^\times.$$

La condition  $v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}}(\varepsilon_\varphi)) = r \leq v_\ell(\tilde{\nu}_{\mathfrak{l}}(\eta_\varphi))$  nous donne alors  $n_\varphi = 0$ ; de sorte que  $\varepsilon_\varphi \in N_{F_r/F}(\mathcal{E}_{F_r})^{e_\varphi}$  est aussi un générateur de  $(\mathcal{E}_F \cap N_{F_r/F}(\mathcal{R}_{F_r}))^{e_\varphi}$ . Et il suit donc :

$$(\mathcal{E}_F \cap N_{F_r/F}(\mathcal{R}_{F_r}))^{e_\varphi} = N_{F_r/F}(\mathcal{E}_{F_r})^{e_\varphi}.$$

Sommant enfin sur tous les caractères  $\varphi \neq 1$ , nous obtenons :

$$\mathcal{E}_F \cap N_{F_r/F}(\mathcal{R}_{F_r}) = N_{F_r/F}(\mathcal{E}_{F_r}) \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{E}_F \cap N_{F_n/F}(F_n^\times) = N_{F_n/F}(E_{F_n}),$$

ce qui bien est la condition manquante requise par le critère de Greenberg (cf. Th. 8, (xiii, b)).

## 10. Condition modérée et conjecture faible en $\ell$ -décomposition

Il est d'usage d'appeler *conjecture de Greenberg faible* l'implication  $\mathcal{F}_F = 1 \Rightarrow \mathcal{C}_F = 1$ , où  $\mathcal{F}_F$  désigne le plus grand sous-module fini de  $\mathcal{C}_F$  (cf. e.g. [27, 28]); ce qui revient à étudier la conjecture de Greenberg sous l'hypothèse additionnelle  $\mathcal{F}_F = 1$ .

Pour préciser la portée de cette condition, commençons par en donner différentes formulations :

**Théorème & Définition 17.** *Soit  $F$  un corps de nombres totalement réel qui vérifie la conjecture de Leopoldt pour un premier  $\ell$  qui se décompose complètement dans  $F$ . Les conditions suivantes :*

- (i) *La limite projective des  $\ell$ -groupes de classes sauvages est triviale :  $\mathcal{C}_F^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]} = 1$*
- (ii) *Les  $\ell$ -groupes de classes engendrés par les places sauvages sont tous triviaux :  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]} = 1$*
- (iii) *Le sous-groupe des points fixes du  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}$  est trivial :  $\mathcal{C}_F^\Gamma = 1$*
- (iv) *Le sous-module fini  $\mathcal{F}_F$  du  $\Lambda$ -module  $\mathcal{C}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}$  est trivial :  $\mathcal{F}_F = 1$*

*sont alors équivalentes. Lorsqu'elles sont vérifiées, nous disons que  $F$  satisfait la condition modérée.*

*Preuve.* Examinons successivement les diverses implications :

- (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) Les places au-dessus de  $\ell$  étant ici totalement ramifiées dans la  $\mathbb{Z}_\ell$ -extension cyclotomique  $F_\infty/F$ , les morphismes normiques  $N_{F_m/F_n} : \mathcal{C}_{F_m}^{[\ell]} \rightarrow \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  entre sous-groupes sauvages sont surjectifs pour  $m \geq n \geq 0$ . Et il revient donc au même d'affirmer que tous les  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  sont triviaux ou que leur limite projective l'est.

- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Si tous les groupes sauvages  $\mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  sont triviaux, les diviseurs construits sur les places au-dessus de  $\ell$  sont engendrés par les  $\ell$ -unités et on a canoniquement :

$$D_{F_n}^{[\ell]} \simeq \mathcal{E}'_{F_n} / \mathcal{E}_{F_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Observant que nous avons par ailleurs  $D_F^{[\ell]} = N_{F_n/F}(D_{F_n}^{[\ell]})$ , nous obtenons l'identité :

$$\mathcal{E}'_F = N_{F_n/F}(\mathcal{E}'_{F_n}) \mathcal{E}_F \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N};$$

ce qui nous donne à la limite, par compacité du  $\ell$ -adifié du groupe des unités, l'identité :

$$\mathcal{E}'_F = \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\mathcal{E}'_{F_n}) \right) \mathcal{E}_F = \mathcal{E}_F^\nu \mathcal{E}_F,$$

où  $\mathcal{E}_F^\nu = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\mathcal{E}'_{F_n}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n})$  est le sous-groupe de  $\tilde{\mathcal{E}}_F$  formé des normes logarithmiques, i.e. des éléments de  $\mathcal{R}_F$  qui sont normes d'unités logarithmiques à tous les étages  $F_n/F$  de la tour cyclotomique (cf. [22], §7, Prop. 19). Il suit en particulier :

$$\mathcal{E}'_F = \tilde{\mathcal{E}}_F \mathcal{E}_F \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{E}_F^\nu.$$

Ce point acquis, notons  $\mathcal{C}'_F = \varprojlim \mathcal{C}'_{F_n}$  la limite projective des  $\ell$ -groupes de  $\ell$ -classes  $\mathcal{C}'_{F_n}$ , qui coïncide ici avec  $\mathcal{C}_F$  du fait de la condition (ii). L'égalité à droite jointe à l'isomorphisme de Kuz'min  $\tilde{\mathcal{E}}_F / \mathcal{E}_F^\nu \simeq \mathcal{C}'_F^\Gamma$  (cf. e.g. [22], §6, Th. 17), nous donne immédiatement  $\mathcal{C}'_F^\Gamma = 1$ , i.e. comme annoncé :

$$\mathcal{C}_F^\Gamma = 1.$$

- (iii)  $\Rightarrow$  (iv) De  $\mathcal{C}_F^\Gamma = 1$ , on tire  $\mathcal{F}^\Gamma = 1$ ; ce qui entraîne  $\mathcal{F}_F = 1$ , puisque  $\mathcal{F}_F$  est fini.

- (iv)  $\Rightarrow$  (i) Enfin, puisque  $\mathcal{C}_F^{[\ell]}$  est fini, d'après le Scolie 3, donc contenu dans  $\mathcal{F}_F$ .

**Corollaire 18.** *Sous la condition modérée, le critère logarithmique suffisant  $\tilde{\mathcal{C}}_F = 1$  de la conjecture de Greenberg donné par le Théorème 11 se trouve être également nécessaire.*

*Preuve.* Notons  $\Gamma_n$  le groupe cyclique  $\text{Gal}(F_n/F)$ . La condition  $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{E}_F^\nu$  rencontrée dans la démonstration de Théorème implique en particulier :  $H^2(\Gamma_n, \tilde{\mathcal{E}}_F)$ ; donc, du fait de la trivialité du quotient de Herbrand des unités logarithmiques :  $H^1(\Gamma_n, \tilde{\mathcal{E}}_F) = 1$ . Il résulte alors de la suite exacte des classes logarithmiques ambiges (cf. [19]) que les morphismes de transition  $\tilde{\mathcal{C}}_F \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}_{F_n}$  sont injectifs. Et la condition de capitulation requise par la Proposition 13 ne peut être remplie que si le groupe  $\tilde{\mathcal{C}}_F$  est déjà nul; ce qui est précisément la condition (c) du Théorème 11.

## INDEX DES PRINCIPALES NOTATIONS

Nous recensons ci-dessous les principales notations utilisées dans le corps de l'article.

### Corps et extensions

- $F$  : un corps de nombres totalement réel ; et  $F_{\mathfrak{p}}$  : le complété de  $F$  en la place  $\mathfrak{p}$  ;
- $F_{\infty} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$  avec  $[F_n : K] = \ell^n$  : la  $\mathbb{Z}_{\ell}$ -extension cyclotomique de  $K$  ;
- $F_n$  : le  $n$ -ième étage de la tour : et  $F_{\mathfrak{p}_n}$  : le complété de  $F_n$  en la place  $\mathfrak{p}_n$  ;
- $F_n^{nr}$  : la  $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale de  $F_n$  ;
- $F_n^{\ell d}$  : la  $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée  $\ell\infty$ -décomposée maximale de  $F_n$  ;
- $F_n^{\ell c}$  : la pro- $\ell$ -extension abélienne localement cyclotomique maximale de  $F_n$  ;
- $F_n^{bp}$  : la pro- $\ell$ -extension de Bertrandias-Payan associée à  $F_n$  ;
- $F_n^{\ell r}$  : la pro- $\ell$ -extension abélienne  $\ell$ -ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale de  $F_n$  ;
- $F_{\infty}^{cd}$  : la pro- $\ell$ -extension abélienne partout complètement décomposée maximale de  $F_{\infty}$  ;
- $F_{\infty}^{nr}$  : la pro- $\ell$ -extension abélienne non-ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale de  $F_{\infty}$  ;
- $K_{\infty}^{\ell r}$  : la pro- $\ell$ -extension abélienne  $\ell$ -ramifiée  $\infty$ -décomposée maximale de  $F_{\infty}$  ;

### Groupes d'idèles

- $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}} = \varprojlim F_{\mathfrak{p}}^{\times} / F_{\mathfrak{p}}^{\times \ell^m}$  : le compactifié  $\ell$ -adique du groupe multiplicatif  $F_{\mathfrak{p}}^{\times}$  ;
- $\mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}}$  : le sous-groupe unité et  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}}$  le groupe des unités logarithmiques dans  $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$  ;
- $\mathcal{R}_{F_{\ell}} = \prod_{i|\ell} \mathcal{R}_{F_i}$  ; puis  $\mathcal{U}_{F_{\ell}} = \prod_{i|\ell} \mathcal{U}_{F_i}$  ; et  $\tilde{\mathcal{U}}_{F_{\ell}} = \prod_{i|\ell} \tilde{\mathcal{U}}_{F_i}$  ;
- $\mu_{F_{\mathfrak{p}}}$  : le  $\ell$ -groupe des racines de l'unité dans  $\mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$  ; puis  $\mu_{F_{\ell}} = \prod_{i|\ell} \mu_{F_i}$  ; et  $\mu_{F_{\infty}} = \prod_{\mathfrak{p}|\infty} \mu_{F_{\mathfrak{p}}}$  ;
- $\mathcal{J}_F = \prod_{\mathfrak{p}}^{\text{res}} \mathcal{R}_{F_{\mathfrak{p}}}$  : le  $\ell$ -adifié du groupe des idèles de  $F$  ;
- $\mathcal{J}_F^{[\ell]} = \mathcal{R}_{F_{\ell}} \mu_{F_{\infty}} \prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}}$  : le sous-groupe des  $\ell\infty$ -idèles ;
- $\mathcal{U}_F = (\prod_{\mathfrak{p}} \mathcal{U}_{F_{\mathfrak{p}}}) \mu_{F_{\infty}}$  : le sous-groupe unité (au sens ordinaire) de  $\mathcal{J}_F$  ;
- $\tilde{\mathcal{U}}_F = (\prod_{\mathfrak{p}} \tilde{\mathcal{U}}_{F_{\mathfrak{p}}}) \mu_{F_{\infty}}$  : le groupe des unités logarithmiques (au sens ordinaire) de  $\mathcal{J}_F$  ;

### Groupes de classes

- $\mathcal{C}_F \simeq \mathcal{J}_F / \mathcal{U}_F \mathcal{R}_F$  : le  $\ell$ -groupe des classes d'idéaux (au sens ordinaire) du corps  $F$  ;
- $\tilde{\mathcal{C}}_F = \tilde{\mathcal{J}}_F / \tilde{\mathcal{U}}_F \mathcal{R}_F$  : le  $\ell$ -groupe des classes logarithmiques (au sens ordinaire) du corps  $F$  ;
- $\mathcal{C}'_F \simeq \mathcal{J}_F / \mathcal{J}_F^{[\ell]} \mathcal{R}_F$  : le  $\ell$ -groupe des  $\ell$ -classes d'idéaux du corps  $F$  ;

### Groupes globaux

- $\mathcal{R}_F = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\times}$  : le  $\ell$ -adifié du groupe multiplicatif du corps  $F$  ;
- $\mathcal{E}'_F = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} E'_F$  : le  $\ell$ -adifié du groupe des  $\ell$ -unités (au sens ordinaire) de  $F$  ;
- $\mathcal{E}_F = \mathbb{Z}_{\ell} \otimes_{\mathbb{Z}} E_F = \mathcal{R}_F \cap \mathcal{U}_F$  : le  $\ell$ -adifié du groupe des unités (ordinaires) de  $F$  ;
- $\tilde{\mathcal{E}}_F = \mathcal{R}_F \cap \tilde{\mathcal{U}}_F$  : le  $\ell$ -groupe des unités logarithmiques de  $F$  ;
- $\tilde{\mathcal{E}}_{F_{\infty}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tilde{\mathcal{E}}_{F_n}$  : le  $\ell$ -groupe des unités logarithmiques de  $F_{\infty}$  ;
- $\mathcal{E}_F^{\nu} = N_{F_{\infty}/F}(\tilde{\mathcal{E}}_{F_{\infty}}) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N_{F_n/F}(\tilde{\mathcal{E}}_{F_n})$  : le groupe des normes logarithmiques.

### Groupes de Galois

- $\Gamma$  : le groupe  $\text{Gal}(K_{\infty}/K)$  ;  $\gamma$  un générateur topologique et  $\Lambda = \mathbb{Z}_{\ell}[[\gamma - 1]]$  l'algèbre d'Iwasawa ;
- $\mathcal{C}_F = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n} \simeq \text{Gal}(F_{\infty}^{nr}/F_{\infty})$  ; puis  $\mathcal{C}_F^{[\ell]} = \varprojlim \mathcal{C}_{F_n}^{[\ell]}$  ; et  $\mathcal{C}'_F = \varprojlim \mathcal{C}'_{F_n} \simeq \text{Gal}(F_{\infty}^{cd}/F_{\infty})$  ;
- $\mathcal{T}_F^{bp} = \text{Gal}(F^{bp}/F_{\infty})$  le groupe de torsion de Bertrandias-Payan.



## RÉFÉRENCES

- [1] K. BELABAS & J.-F. JAULENT *The logarithmic class group package in PARI/GP*, Pub. Math. Besançon (2016).
- [2] F. DIAZ Y DIAZ, J.-F. JAULENT, S. PAULI, M.E. POHST & F. SORIANO, *A new algorithm for the computation of logarithmic class groups of number fields*, Experimental Math. **14** (2005), 67–76.
- [3] L.J. FEDERER & B.N. GROSS, (with an appendix by W. SINNOT), *Regulators and Iwasawa modules*, Inv. Math. **62** (1981), 443–457.
- [4] T. FUKUDA, *Greenberg’s Conjecture and Relative Unit Groups for Real Quadratic Fields*, J. Numb. Th. **65** (1997), 23–39.
- [5] T. FUKUDA, *Cyclotomic Units and Greenberg’s Conjecture for Real Quadratic Fields*, Math. Comp. **65** (1996), 1339–1348.
- [6] T. FUKUDA & K. KOMATSU, *On  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of real quadratic fields*, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 95–102.
- [7] T. FUKUDA & H. TAYA, *The Iwasawa  $\lambda$ -invariants of  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of real quadratic fields*, Acta Arith. **69** (1995), 277–292.
- [8] T. FUKUDA & H. TAYA, *Computational research on Greenberg’s conjecture for real quadratic fields*, Mem. School Sci. Eng. Waseda Univ. **58** (1994), 175–203.
- [9] G. GRAS, *Classes généralisées invariantes*, J. Math. Soc. Japan **46**, 3 (1994), 467–476.
- [10] G. GRAS, *Class Field Theory : from theory to practice*, Springer Monographs in Mathematics (2003).
- [11] G. GRAS, *Invariant generalized ideal classes – Structure theorems for  $p$ -class groups in  $p$ -extensions*, Prépublication (2016), to appear in Proceedings – Mathematical Sciences, Indian Academy of Sciences.
- [12] G. GRAS, *Les  $\theta$ -régulateurs locaux d’un nombre algébrique : conjectures  $p$ -adiques*, Canadian J. Math. **68** (2016), 571–624.
- [13] G. GRAS, *Approche  $p$ -adique de la conjecture de Greenberg (cas galoisien réel  $p$ -décomposé)*, Prépublication (2016).
- [14] G. GRAS & J.-F. JAULENT, *Sur les corps de nombres réguliers*, Math. Z. **202** (1989), 343–365.
- [15] R. GREENBERG, *On the Iwasawa invariants of totally real number fields*, Amer. J. Math. **98** (1976), 263–284.
- [16] C. GREITHER, *Sur les normes universelles dans les  $\mathbb{Z}_p$ -extensions*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 205–220.
- [17] J.-F. JAULENT, *Sur l’indépendance  $\ell$ -adique de nombres algébriques*, J. Numb. Th. **20** (1985), 149–158.
- [18] J.-F. JAULENT, *Sur les conjectures de Leopoldt et de Gross*, Actes des Journées Arithmétiques de Besançon, Astérisque **147-148** (1987), 107–120.
- [19] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps de nombres*, J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.
- [20] J.-F. JAULENT, *Théorie  $\ell$ -adique globale du corps de classes*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 355–397.
- [21] J.-F. JAULENT, *Classes logarithmiques des corps totalement réels*, Acta Arithmetica **103** (2002), 1–7.
- [22] J.-F. JAULENT, *Sur les normes cyclotomiques et les conjectures de Leopoldt et de Gross-Kuz’min*, Annales Math. Québec (à paraître)
- [23] J.-F. JAULENT, *Normes cyclotomiques naïves et unités logarithmiques* Prépublication (2016) : <http://arxiv.org/abs/1609.01901>
- [24] J.-F. JAULENT & T. NGUYEN QUANG DO, *Corps  $p$ -réguliers, corps  $p$ -rationnels et ramification restreinte*, J. Théor. Nombres Bordeaux **5** (1993), 343–363.
- [25] L. V. KUZ’MIN, *The Tate module of algebraic number fields*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 267–327.
- [26] M. LE FLOC’H, A. MOVAHEDI & T. NGUYEN QUANG DO, *On capitulation cokernels in Iwasawa Theory*, Am. J. Math. **127** (2005), 851–877.
- [27] T. NGUYEN QUANG DO, *Sur la conjecture faible de Greenberg dans le cas abélien  $p$ -décomposé*, Int. J. Number Theory **2** (2006), 49–64.
- [28] T. NGUYEN QUANG DO, *Sur une forme faible de la conjecture de Greenberg II*, Prépublication (2015) : <https://www.researchgate.net/publication/278961782>
- [29] sc M. Ozaki & H. Taya, *A note on Greenberg’s conjecture for real abelian number fields*, Manuscripta Math. **88** (1995), 311–320.
- [30] H. SUMIDA, *On Capitulation of  $S$ -Ideals in  $\mathbb{Z}_p$ -Extensions*, J. Number Theory **86** (2001), 163–174.
- [31] H. TAYA, *On cyclotomic  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of real quadratic fields*, Acta Arithmetica **74** (1996), 107–119.
- [32] H. TAYA, *On  $p$ -adic zeta functions and  $\mathbb{Z}_p$ -extensions of certain totally real number fields*, Tohoku Math. J. **51** (1999), 21–33.

Jean-François JAULENT  
 Institut de Mathématiques de Bordeaux  
 Université de BORDEAUX & CNRS  
 351, cours de la libération  
 F-33405 TALENCE Cedex  
 courriel : Jean-Francois.Jaulent@math.u-bordeaux.fr